A.2.5 : Equations et fonctions de Bessel

Equations particulières de Bessel et leurs solutions

$$y''+\frac{y'}{x}+m^2\,y=0 \quad\Rightarrow\quad y=k_1\,J_0(m\,x)+k_2\,Y_0(mx)$$

$$x^2\,y''+x\,y'+\left(x^2-n^2\right)y=0 \quad\Rightarrow\quad y=k_1\,J_n(x)+k_2\,Y_n(x) \quad \text{(n entier)}$$

$$y''+\frac{y'}{x}-m^2\,y=0 \quad\Rightarrow\quad y=k_1\,I_0(mx)+k_2\,K_0(mx)$$

$$x^2\,y''+x\,y'-\left(x^2+n^2\right)y=0 \quad\Rightarrow\quad y=k_1\,I_n(x)+k_2\,K_n(x)$$

Jn Fonction de Bessel de 1ère espèce non modifiée d'ordre n
I_n Fonction de Bessel de 1ère espèce modifiée d'ordre n
Y_n Fonction de Bessel de 2ème espèce non modifiée d'ordre n
K_n Fonction de Bessel de 2ème espèce modifiée d'ordre n.

(cf. Özisik pour la définition des fonctions de Bessel).

Principales propriétés des fonctions de Bessel

Récurrence

$$J_{n+1}(u)=-J_{n-1}(u)+\frac{2\,n}{u}J_n(u) \qquad Y_{n+1}(u)=-Y_{n-1}(u)+\frac{2\,n}{u}Y_n(u)$$

$$I_{n+1}(u)=I_{n-1}(u)-\frac{2\,n}{u}I_n(u) \qquad K_{n+1}(u)=K_{n-1}(u)-\frac{2\,n}{u}K_n(u)$$

Dérivée

$$J'_n(u)=J_{n-1}(u)-\frac{n}{u}J_n(u)=-J_{n+1}(u)+\frac{n}{u}J_n(u) \qquad Y'_n(u)=Y_{n-1}(u)-\frac{n}{u}J_n(u)=-Y_{n+1}(u)+\frac{n}{u}Y_n(u)$$

$$I'_n(u)=I_{n-1}(u)-\frac{n}{u}I_n(u)=I_{n+1}(u)+\frac{n}{u}I_n(u) \qquad K'_n(u)=-K_{n-1}(u)-\frac{n}{u}K_n(u)=-K_{n+1}(u)+\frac{n}{u}K_n(u)$$

Limites des fonctions de Bessel d'ordre 0 et 1

Si $u \to 0$:

$J_0(u) \to 1$ $\quad J_1(u) \to 0$ $\quad Y_0(u) \to -\infty$ $\quad Y_1(u) \to -\infty$
$I_0(u) \to 1$ $\quad I_1(u) \to 0$ $\quad K_0(u) \to +\infty$ $\quad K_1(u) \to +\infty$

Si $u \to \infty$

$J_0(u) \to 0$ $\quad J_1(u) \to 0$ $\quad Y_0(u) \to 0$ $\quad Y_1(u) \to 0$
$I_0(u) \to +\infty$ $\quad I_1(u) \to +\infty$ $\quad K_0(u) \to 0$ $\quad K_1(u) \to 0$

Comportement asymptotique des fonctions de Bessel d'ordre 0 et 1

Si $u \to 0$:

$J_0(u) \to 1$ $\quad J_1(u) \to u/2$ $\quad Y_0(u) \to (2/\pi)\ln(u)$ $\quad Y_1(u) \to 2/\pi u$
$I_0(u) \to 1$ $\quad I_1(u) \to u/2$ $\quad K_0(u) \to -\ln(u)$ $\quad K_1(u) \to 1/x$

Si $u \to \infty$

$$J_0(u) \to \sqrt{2/\pi u}\,\cos\left(u-\frac{\pi}{4}\right) \qquad J_1(u) \to \sqrt{2/\pi u}\,\cos\left(u-\frac{u}{2}-\frac{\pi}{4}\right) \qquad Y_0(u) \to \sqrt{2/\pi u}\,\sin\left(u-\frac{u}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$Y_1(u) \to \sqrt{2/\pi u}\,\sin\left(u-\frac{\pi}{4}\right) \qquad I_0(u),\,I_1(u) \to \sqrt{2/\pi u}\,\exp(u) \qquad K_0(u),\,K_1(u) \to \sqrt{\pi/2u}\,\exp(-u)$$